ÉCOLE NAVALE

Deuxième composition de mathématiques

Concours 1991

Durée : 3 heures

Il sera tenu compte dans la correction de la présentation et de la clarté des raisonnements. Tout raisonnement trop long ou au contraire trop rapide sera sanctionné. Les deux parties sont indépendantes.

PREMIÈRE PARTIE

1°) f étant une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[a, b]$, montrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos\lambda t\,dt = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin\lambda t\,dt = 0.$$

2°) Soit la fonction $g_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sin x}$; on note $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} g_n(t)\,dt$.

a) Montrer que I_n a un sens, calculer I_0, I_1, I_2 et exprimer la différence $I_n - I_{n-2}$ en fonction de n. En déduire la valeur de I_n.

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (I_n - I_{n-1}) = 0$ et en déduire que I_n converge vers une limite vérifiant :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi}{2} = 2\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \qquad \left(\sum_{k=0}^{k=n} \cdots\right)$$

c) En déduire une méthode de calcul de π ; décrire les calculs nécessaires pour obtenir un encadrement de π de longueur 10^{-4}. Écrire un programme en PASCAL permettant ce calcul.

d) Soit $a \in]0, \pi[$, montrer que $I_n - \displaystyle\int_0^a \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$ tend vers 0 et en déduire la limite de $\displaystyle\int_0^a \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$ quand n tend vers l'infini.

3°) Montrer que pour $a > 0$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^a \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$ a un sens.

Prouver que $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ admet un prolongement de classe C^1 sur $[0, a]$, a vérifiant $0 < a < \pi$.

Trouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\displaystyle\int_0^a \frac{\sin nx}{x}\,dx - \int_0^a \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx\right]$.

En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^a \frac{\sin nx}{x}\,dx$ quand n tend vers l'infini. Étudier le cas où $a > \pi$.

4°) ***a)*** Montrer que $\displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin nt}{t}\,dt$ et en déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$;

puis prouver la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ et calculer sa valeur.

b) Montrer que $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \geqslant \frac{2}{(n+1)\pi}$, minorer $\displaystyle\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$;

En déduire que l'intégrale I n'est pas absolument convergente.

A SUIVRE

DEUXIÈME PARTIE

x étant un réel strictement positif donné, on considère les fonctions U, V, f, g, h de la variable réelle λ ($\lambda \in \mathbb{R}^+$) définies par les intégrales généralisées :

$$U(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda u} \cos u}{(u+x)^3}\, du \quad , \quad V(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda u} \sin u}{(u+x)^3}\, du.$$

$$f(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda u} \cos u}{(u+x)^2}\, du \quad , \quad g(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda u} \sin u}{(u+x)^2}\, du \quad , \quad h(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda u} \sin u}{u+x}\, du.$$

1°) Montrer l'existence, pour tout réel $\lambda \geqslant 0$, des intégrales définissant U, V, f, g, et, pour tout réel $\lambda > 0$ de l'intégrale définissant h.

2°) ***a)*** Calculer les intégrales $F(u) = \int_0^u e^{-\lambda t} \cos t\, dt$ et $G(u) = \int_0^u e^{-\lambda t} \sin t\, dt$.

b) A l'aide d'intégrations par parties que l'on justifiera, montrer les relations suivantes :

$$\forall \lambda \geqslant 0 \quad \begin{cases} (1+\lambda^2) f(\lambda) = \dfrac{\lambda}{x^2} - 2\lambda U(\lambda) + 2 V(\lambda) \\ (1+\lambda^2) g(\lambda) = \dfrac{1}{x^2} - 2\lambda V(\lambda) - 2 U(\lambda) \end{cases}$$

$$\forall \lambda > 0 \qquad (1+\lambda^2) h(\lambda) = \frac{1}{x} - f(\lambda) - \lambda g(\lambda)$$

On démontrera également que $h(0)$ existe et que

$$h(0) = \frac{1}{x} - f(0).$$

3°) ***a)*** Montrer que :

$$\forall \lambda \geqslant 0 \qquad \forall u \geqslant 0 \qquad |e^{-\lambda u} - 1| \leqslant \lambda u.$$

b) En déduire que :

$$\lim_{\lambda \to 0+} |U(\lambda) - U(0)| = \lim_{\lambda \to 0+} |V(\lambda) - V(0)| = 0.$$

c) En déduire, en utilisant les égalités précédentes, les continuités de f, g, h au point $\lambda = 0$ à droite.

d) Montrer que $\lim_{\lambda \to +\infty} h(\lambda) = 0$.

4°) ***a)*** Montrer l'inégalité :

$$\forall \lambda_0 > 0, \ \forall u \geqslant 0, \ \forall \lambda > \frac{\lambda_0}{2} \qquad |e^{-\lambda u} - e^{-\lambda_0 u} + u(\lambda - \lambda_0) e^{-\lambda_0 u}| \leqslant \frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2} u^2 e^{-\frac{\lambda_0 u}{2}}$$

Tournez la page S.V.P.

b) En déduire que les dérivées de f et de g existent en tout point $\lambda_0 > 0$ et que l'on a :

$$f'(\lambda_0) = -\int_0^{\infty} \frac{ue^{-\lambda_0 u}\cos u}{(u+x)^2}\,du$$

$$g'(\lambda_0) = -\int_0^{+\infty} \frac{ue^{-\lambda_0 u}\sin u}{(u+x)^2}\,du$$

c) Montrer que h est dérivable dans $]\,0, +\infty\,[$.

5°) *a)* Montrer que la fonction $\lambda \longrightarrow l(\lambda)$ définie par $l(\lambda) = e^{\lambda x}h(\lambda) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda(u+x)}\sin u}{u+x}\,du$, est dérivable dans $]\,0, +\infty\,[$.

b) Calculer la dérivée $l'(\lambda)$ (on pourra utiliser la fonction G).

c) En déduire que $l(\lambda) = -\displaystyle\int_0^{\lambda} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt + h(0)$ pour tout $\lambda > 0$.

6°) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0+} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u+x}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$.

Pour cela, on montrera successivement les deux inégalités :

a) $\left|\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u\left(\frac{1}{u+x} - \frac{1}{u}\right)du\right| \leqslant x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{u+x}$ $\qquad \forall x > 0$

b) $\left|\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{A} \sin u\left(\frac{1}{u+x} - \frac{1}{u}\right)du\right| \leqslant x\int_{\frac{\pi}{2}}^{A} \frac{du}{u^2}$ $\qquad \forall A > \dfrac{\pi}{2}$, $\forall x > 0$

En déduire l'existence de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ et la conclusion annoncée.

7°) En utilisant la fin de la cinquième question, montrer que

$$h(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u+x}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt.$$

En déterminant la limite, lorsque $x \longrightarrow 0^+$ de l'intégrale du dernier membre de cette égalité (utiliser par exemple 3°) a)), déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$.

Calculer également $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 du$.

FIN